ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2024. Випуск 96. С. 83–104
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2024. Issue 96. P. 83–104
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.071-092

УДК 519.21

СТОХАСТИЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ В РІВНЯННЯХ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Олег БУГРІЙ, Мар'яна ХОМА, Ірина-Марія ВОВК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів
e-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua, mariana.khoma@lnu.edu.ua,
iryna-mariia.vovk@lnu.edu.ua

Розглянуто методичні питання, пов'язані з поняттям стохастичного інтегрування та диференціювання. Досліджено задачу Коші для модельних нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності.

Ключові слова: стохастична похідна, стохастичне диференціальне рівняння, вінерівський процес.

1. Вступ

Нехай $T > 0$ – деяке фіксоване число, $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – повний імовірнісний простір, зокрема $\mathbb{S}$ – непорожня множина, яка трактується як простір станів чи простір елементарних подій, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра підмножин множини $\mathbb{S}$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – імовірнісна міра. Також нехай $\Theta_{0,T} := (0, T) \times \mathbb{S}$.

Шукатимемо розв'язок $u : \Theta_{0,T} \to \mathbb{R}$ задачі Коші для модельного стохастичного диференціального рівняння (СДР) вигляду

$$u_t + a(t)u + g(t)|u|^{q(t)-2}u = f(t, \omega) + W_t(t, \omega), \quad (t, \omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{1}$$

$$u(0, \omega) = u_0(\omega), \quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{2}$$

де a, g, q, f, u_0 – деякі функції, зокрема q – показник нелінійності рівняння (1), W – випадковий вінерівський процес. Вираз W_t є білим шумом.

2020 Mathematics Subject Classification: 60H10, 34F05, 34A12

Розглянуто методичні засади, пов'язані з поняттям стохастичного інтегрування та диференціювання. Зокрема, ми нагадаємо означення та властивості стохастичного інтеграла Пелі-Вінера-Зигмунда, стохастичного диференціала тощо. Використавши їх, введемо поняття білого шуму W_t як похідної в сенсі розподілів від випадкового вінерівського процесу W. Це дасть змогу ввести поняття узагальненого розв'язку задачі (1)-(2) та довести його існування.

Отримані в цій статті результати є продовженням досліджень у галузі СДР, розпочатих у [1].

2. Допоміжні позначення

Нагадаємо спершу кілька позначень та означень з функціонального аналізу і теорії ймовірностей. Нехай $||\cdot||_B \equiv ||\cdot;B||$ є нормою деякого банахового простору B, B^* – спряжений до B простір, $\langle \cdot,\cdot\rangle_B$ – скалярний добуток між B^* та B, $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярний добуток в деякому гільбертовому просторі H, $|\cdot|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$.

Припустимо, що $m, N \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$, $\mathcal{O}$ – вимірна множина $\mathbb{R}^N$, B – банахів простір, $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ – множина вимірних функцій $v : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $C^m(\mathcal{O})$ та $C_0^\infty(\mathcal{O})$ – простори гладких функцій з [2, с. 17, 21], $L^p(\mathcal{O})$ – стандартний простір Лебега з [3, с. 11], $C(\mathcal{O};B)$ та $C^m(\mathcal{O};B)$ – простори B-значних гладких функцій, визначених на $\mathcal{O}$ (див. [3, с. 9]), $L^p(\mathcal{O};B)$ простір Лебега-Бохнера з [4, с. 11],

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{\mathfrak{q} \in L^\infty(\mathcal{O}) \ \ | \ \ \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y) > 0\}. \tag{3}$$

Нехай $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O};B) := \{u : \mathcal{O} \to B \ \ | \ \ u \in L^1(K;B)$ для всіх компактів $K \subset \mathcal{O}\}$ та $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}) := L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O};\mathbb{R})$. У разі потреби розглядатимемо, наприклад, функцію двох змінних $\alpha = \alpha(t,\omega)$, $(t,\omega) \in \Theta_{0,T}$ як функцію однієї змінної, яка, наприклад, кожному моменту часу $t \in (0,T)$ ставить у відповідність функцію змінної $\omega \in \mathbb{S}$, і писатимемо $\alpha(t)$ замість $\alpha(t,\cdot)$.

2.1. Узагальнені простори Лебега

Для будь-якого $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ позначимо

$$\mathfrak{q}_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \quad \mathfrak{q}^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \qquad S_{\mathfrak{q}}(s) := \max\{s^{\mathfrak{q}_0},\, s^{\mathfrak{q}^0}\}, \quad s \geq 0, \tag{4}$$

$$\mathfrak{q}'(y) := \frac{\mathfrak{q}(y)}{\mathfrak{q}(y)-1} \ \text{ for a.e. } \ y \in \mathcal{O} \tag{5}$$

(тут $\frac{1}{\mathfrak{q}(y)} + \frac{1}{\mathfrak{q}'(y)} = 1$ майже для всіх (м.д.в.) $y \in \mathcal{O}$ та $\mathfrak{q}' \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ при $\mathfrak{q}_0 > 1$),

$$\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathfrak{q}(y)}\, dy, \quad v \in \mathcal{M}(\mathcal{O}). \tag{6}$$

Припустимо, що $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ та $\mathfrak{q}_0 > 1$. Множина

$$L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O}) := \{v \in \mathcal{M}(\mathcal{O}) \ \ | \ \ \rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) < +\infty\} \tag{7}$$

з нормою Люксембурга

$$||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| := \inf\{\lambda > 0 \ \ | \ \ \rho_{\mathfrak{q}}(v/\lambda;\mathcal{O}) \leq 1\} \tag{8}$$

називається *узагальненим простором Лебега.* Відомо, що $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ є рефлексивним сепарабельним банаховим простором (див. [2, с. 18, 21]). Функцію $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}(y)$ назвемо *(змінним) показником інтегровності* елементів простору $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$.

Твердження 1 (Зауваження 2, [5]). *Припустимо, що* $\mathfrak{q}\in\mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{q}_0\geq 1$, $S_{\mathfrak{q}}$ *– функція з* (4), $\rho_{\mathfrak{q}}$ *є визначеною в* (6). *Тоді для будь-якої функції* $v\in\mathcal{M}(\mathcal{O})$ *виконуються такі твердження:*

(i) $||v;L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})||\leq S_{1/\mathfrak{q}}(\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}))$ *при* $\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O})<+\infty$;

(ii) $\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O})\leq S_{\mathfrak{q}}(||v;L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})||)$ *при* $||v;L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})||<+\infty$.

Для банахових просторів X та Y позначення $X \circlearrowright Y$ означає неперервне вкладення X в Y, а позначення $X \,\bar{\circlearrowright}\, Y$ – неперервне і щільне вкладення.

Твердження 2 (Наслідок 2.1 [2], с. 20). *Якщо* $\mathfrak{q},r\in\mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{q}(y)\geq r(y)\geq 1$ *м.д.в.* $y\in\mathcal{O}$, *то* $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O}) \,\bar{\circlearrowright}\, L^{r(y)}(\mathcal{O})$ *та*

$$||v;L^{r(y)}(\mathcal{O})||\leq 2(1+mes\,\mathcal{O})||v;L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})||,\quad v\in L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O}).$$

При $\mathfrak{q}(y)\equiv\text{const}$ ми отримаємо *стандартний простір Лебега* $L^{\mathfrak{q}}(\mathcal{O})$, де $\mathfrak{q}\in\mathbb{R}$ та $\mathfrak{q}\geq 1$. При $\mathcal{O}=(0,T)$ для зручності писатимемо $L^{\mathfrak{q}}(0,T)$ замість $L^{\mathfrak{q}}((0,T))$ тощо.

Користуватимемося такими оцінками нелінійних виразів.

Твердження 3 (Лема 3.3, [6], с. 4). *Якщо* $\mathfrak{q}\in\mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{q}_0>1$, $\mathfrak{q}'$ *взято з* (5), *то для всіх* $a,b\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, *та м.д.в.* $y\in\mathcal{O}$ *виконується узагальнена нерівність Юнга*

$$ab\leq\varepsilon\,|a|^{\mathfrak{q}(y)}+Y_{\mathfrak{q}}(\varepsilon)\,|b|^{\mathfrak{q}'(y)},\tag{9}$$

де $Y_{\mathfrak{q}}(\varepsilon)=\varepsilon^{-1/(\mathfrak{q}_0-1)}$, *а при* $\mathfrak{q}(y)\equiv 2$ *матимемо, що* $Y_2(\varepsilon)=1/(4\varepsilon)$.

Твердження 4 (Твердження 4 [7], с. 701). *Якщо* $\mathfrak{q}\in\mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ *та* $\mathfrak{q}_0>1$, *то правильними є такі твердження:*

i) для всіх $\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}^n$ *та м.д.в.* $y\in\mathcal{O}$ *виконується оцінка*

$$\Big||\eta_1|^{\mathfrak{q}(y)-2}\eta_1-|\eta_2|^{\mathfrak{q}(y)-2}\eta_2\Big|\leq C_1(\mathfrak{q}_0,\mathfrak{q}^0)\Big(|\eta_1|+|\eta_2|\Big)^{\mathfrak{q}(y)-1-\alpha(y)}|\eta_1-\eta_2|^{\alpha(y)},\tag{10}$$

де $0\leq\alpha(y)\leq\min\{1,\mathfrak{q}(y)-1\}$, $C_1(\mathfrak{q}_0,\mathfrak{q}^0):=\max\{1,2^{2\mathfrak{q}_0},\,(\mathfrak{q}^0-1)2^{2\mathfrak{q}_0}\}$;

ii) для всіх $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^n$ *та м.д.в.* $y\in\mathcal{O}$ *виконується оцінка*

$$\Big(|\xi_1|^{\mathfrak{q}(y)-2}\xi_1-|\xi_2|^{\mathfrak{q}(y)-2}\xi_2,\xi_1-\xi_2\Big)\geq C_2(\mathfrak{q}_0,\mathfrak{q}^0)\Big(|\xi_1|+|\xi_2|\Big)^{\mathfrak{q}(y)-\beta(y)}|\xi_1-\xi_2|^{\beta(y)},\tag{11}$$

де $\max\{\mathfrak{q}(y),2\}\leq\beta(y)<\infty$, $C_2(\mathfrak{q}_0,\mathfrak{q}^0):=\min\{2^{2\mathfrak{q}^0},\,(\mathfrak{q}_0-1)2^{2\mathfrak{q}^0}\}$.

2.2. Банахові простори випадкових величин

Нехай знову $(\mathbb{S},\mathcal{F},\mathbb{P})$ – повний імовірнісний простір. Вимірну (див. [8, с. 79]) стосовно σ-алгебри $\mathcal{F}$ функцію $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}$ називатимемо *F-вимірною функцією.*

Означення 1. F-вимірна функція $\xi=\xi(\omega)$, де $\omega\in\mathbb{S}$ – випадкова змінна=елементарна подія, називається *випадковою величиною (в.в.).*

Абсолютно неперервна в.в. ξ повністю характеризується своєю *щільністю розподілу* (*probability density function, PDF*), яку позначимо $f_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Нагадаємо, що в цьому випадку інтеграл за мірою $\mathbb{P}$ вигляду

$$\mathbb{E}\,\xi := \int\limits_{\mathbb{S}} \xi(\omega)\,\mathbb{P}\,(d\omega) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}} x\, f_\xi(x)\, dx$$

називається *математичним сподіванням* в.в. ξ (якщо інтеграли існують).

Нехай $q \geq 1$ – деяке число. *Випадковим простором Лебега* $L_q(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ назвемо множину всіх випадкових величин зі скінченним абсолютним моментом q-го порядку, тобто

$$L_q(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \Big\{ \xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R} \;\Big|\; 1)\ \xi \text{ – вимірна щодо } \mathcal{F} \text{ функція},$$
$$2)\ \mathbb{E}\Big[|\xi|^q\Big] < +\infty, \quad \text{тобто} \quad \int\limits_{\mathbb{S}} |\xi(\omega)|^q\, \mathbb{P}\,(d\omega) < +\infty \Big\}. \tag{12}$$

Замість $L_q(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ часто пишуть $L_q(\mathbb{S})$ чи просто L_q. Ототожнимо в.в. ξ_1 та ξ_2 як елементи простору L_q у випадку, якщо $\mathbb{P}\,\{\omega \in \mathbb{S} \mid \xi_1(\omega) \neq \xi_2(\omega)\} = 0$ (писатимемо у цьому випадку $\xi_1 = \xi_2$ майже напевно (м.н.)). Відомим є такий факт.

Твердження 5. *Множина функцій L_q, $1 \leq q < +\infty$ є банаховим простором стосовно норми*

$$||u||_{L_q} := \Big(\mathbb{E}\Big[|\xi|^q\Big]\Big)^{1/q} \equiv \Big(\int\limits_{\mathbb{S}} |\xi(\omega)|^q\, \mathbb{P}\,(d\omega)\Big)^{1/q}.$$

Крім того, $L_p \mathrel{\bar{\circlearrowright}} L_q$ при $p \geq q$. При $q = 2$ простір L_2 є гільбертовим зі скалярним добутком $(\xi, \eta)_{L_2} := \mathbb{E}\,[\xi\eta]$.

Означення 2. Послідовність випадкових величин $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до в.в. ξ *в середньому квадратичному*, якщо вона збігається до ξ в сенсі простору L_2, тобто якщо $||\xi_k - \xi||_{L_2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Писатимемо $\xi = \underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_k$ (limit in mean).

Нехай $T > 0$ та $d \in \mathbb{N}$ – деякі числа, $\mathcal{B}(0, T)$ – борелівські підмножини $[0, T]$,

$$\mathcal{P} := \mathcal{B}(0, T) \times \mathcal{F} \tag{13}$$

– найменша σ-алгебра, що містить всі множини вигляду $B \times F$, де $B \in \mathcal{B}(0, T)$ та $F \in \mathcal{F}$. Вимірне стосовно $\mathcal{P}$ відображення

$$\Theta_{0,T} \ni (t, \omega) \mapsto z(t, \omega) \in \mathbb{R}^d \tag{14}$$

називатимемо *BF-вимірною функцією* (в [9] вжито термін "product measurable").

Лема 1. *Якщо функція z з формули (14) є*

(i) неперервною за $t \in [0, T]$ для $\mathbb{P}$-майже всіх фіксованих $\omega \in \mathbb{S}$,

(ii) вимірною за $\omega \in \mathbb{S}$ для всіх фіксованих $t \in [0, T]$,

то вона є BF-вимірною.

Доведення. Для спрощення записів проведемо доведення леми у випадку $d = 1$ та $T = 1$. Для доведення достатньо побудувати послідовність $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ BF-вимірних функції, яка поточково збігається до функції z з (14). Спершу введемо позначення.

Через $int(y)$ позначатимемо цілу частину числа $y \in \mathbb{R}$. Для $t \in [0,1]$ та $y \in \mathbb{R}$ через F_y^t позначимо прообраз променя $(-\infty, y)$ у відображенні $\mathbb{S} \ni \omega \mapsto z(t,\omega) \in \mathbb{R}$. З припущення (ii) випливає, що $F_y^t \in \mathcal{F}$.

Нехай $z_k(t,\omega) := z\Big(\dfrac{int(kt)}{k}, \omega\Big)$, $t \in [0,1]$, $\omega \in \mathbb{S}$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\dfrac{y-1}{y} \le \dfrac{int(y)}{y} \le \dfrac{y+1}{y}$, то $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{int(y)}{y} = 1$, і тому з припущення (i) для всіх $t \in [0,1]$ та $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega \in \mathbb{S}$ матимемо, що $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k(t,\omega) = z(t,\omega)$.

Для завершення доведення залишилося лише довести BF-вимірність кожного z_k. Цей факт випливає з таких очевидних міркувань:

$$z_k(t,\omega) = \begin{cases} z(0,\omega), & t \in [0, \frac{1}{k}), \\ z(\frac{1}{k},\omega), & t \in [\frac{1}{k}, \frac{2}{k}), \\ \vdots & \\ z(\frac{k-1}{k},\omega), & t \in [\frac{k-1}{k}, 1), \\ z(1,\omega), & t = 1. \end{cases} \qquad \omega \in \mathbb{S}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Крім того, прообраз променя $(-\infty, y)$ має вигляд

$$z_k^{-1}\Big((-\infty,y)\Big) = \Big(\bigcup_{i=0}^{k-1} \Big[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\Big) \times F_y^{i/k}\Big) \cup \Big(\{t=1\} \times F_y^1\Big).$$

Ця множина належить до сім'ї $\mathcal{P}$ з (13) як скінченне об'єднання множин з $\mathcal{P}$. $\square$

Поряд з узагальненим (звичайним у випадку сталого показника інтегровності) простором Лебега (7) та випадковим простором Лебега (12) розглянемо їх поєднання. Нехай $q \in B_+((0,T))$, $q_0 > 1$ (див. позначення (3) та (4)). *Узагальненим випадковим простором Лебега* $L^{q(t)}(\Theta_{0,T})$ назвемо множину

$$L^{q(t)}(\Theta_{0,T}) := \Big\{ z : \Theta_{0,T} \to \mathbb{R} \ \Big| \ \text{1) } z \text{ є BF-вимірною функцією,}$$

$$\text{2) } \rho_q(z;\Theta_{0,T}) := \int_0^T \int_{\mathbb{S}} |z(t,\omega)|^{q(t)}\, \mathbb{P}(d\omega)\, dt < +\infty \Big\}, \tag{15}$$

на якій введено відповідну норму Люксембурга типу (8).

Зрозуміло, що введені поняття можна узагальнити на функції трьох і більше змінних. Нам буде зручно користуватися таким позначенням: нехай $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{B}(\mathcal{O})$ – борелівські підмножини $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{K} := \mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathcal{O}) \tag{16}$$

– найменша σ-алгебра, яка містить всі множини вигляду $A \times B$, де $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{O})$. Вимірне стосовно $\mathcal{K}$ відображення

$$(\Theta_{0,T} \times \mathcal{O}) \ni (t,\omega,z) \mapsto L(t,\omega,z) \in \mathbb{R}^d \tag{17}$$

називатимемо *BBF-вимірною функцією.*

Наприкінці підрозділу нагадаємо ще таке загальне твердження.

Твердження 6 (теорема 1 [8], с. 114). *Якщо функція f є вимірною, функція g є інтегровною і виконується нерівність $|f| \le g$, то функція f — інтегровна.*

2.3. Випадкові процеси та їхні властивості

Нагадаємо таке поняття.

Означення 3. *Випадковим процесом (в.п.)* називають функцію $\xi = \xi(t,\omega)$ двох змінних $t \in [0,T]$, $\omega \in \mathbb{S}$. У цьому випадку змінну $\omega \in \mathbb{S}$ часто називають *випадковою змінною*, а змінну $t \in (0,T)$ – *детермінованою (невипадковою) змінною.*

Ми здебільшого матимемо справу з *вінерівським процесом*, означення якого наведемо для зручності (див. [10, с. 37] та [11, с. 38]).

Означення 4. В.п. $W = W(t,\omega)$ називається *вінерівським процесом*, якщо

1w) $W(0,\omega) = 0$ м.н.;

2w) для довільних $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ випадкові величини

$$W(t_1), \quad W(t_2) - W(t_1), \quad W(t_3) - W(t_2), \quad ..., W(t_k) - W(t_{k-1})$$

є незалежними в сукупності;

3w) для всіх $t > s \ge 0$ випадкова величина $W(t) - W(s)$ є нормальною класу $N(0, t-s)$, тобто має PDF вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Лема 2. *Вінерівський процес $W(t,\omega)$, $(t,\omega) \in \Theta_{0,T}$, є BF-вимірною функцією та належить до простору $C([0,T]; L_p)$ для довільного $p \in [1,+\infty)$.*

Доведення. За означенням W є вимірною функцією за змінною ω. З [11, с. 51] випливає, що вінерівський процес є неперервним за $t \in [0,T]$. Тому з леми 1 зразу матимемо його BF-вимірність.

Подальше доведення леми у випадку $p = 2$ зроблено у лемі 13 [1]. Для $p \ge 1$ матимемо таке. Нехай $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$. Тоді $W(t_2) - W(t_1) \in N(0, t_2 - t_1)$. З вигляду (18) PDF цієї в.в. та означення математичного сподівання отримаємо, що

$$I := \mathbb{E}\Big[|W(t_2) - W(t_1)|^p\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^p\, e^{-\frac{x^2}{2(t_2-t_1)}}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\, dx.$$

Зробивши заміну $x \rightsquigarrow y$, де $x = \sqrt{2(t_2-t_1)}y$ (тоді $dx = \sqrt{2(t_2-t_1)}\, dy$), матимемо

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sqrt{2(t_2-t_1)}\Big)^p |y|^p\, e^{-y^2} \sqrt{2(t_2-t_1)}\, dy =$$

$$= \frac{2^{p/2}(t_2-t_1)^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^p\, e^{-y^2}\, dy = C_3(p)(t_2-t_1)^{p/2}.$$

Тому $||W(t_2) - W(t_1)||_{L_p} \le \sqrt{C_3(p)}(t_2-t_1)^{1/2}$ і лему повністю доведено. □

Лема 3. *Вінерівський процес W належить до узагальненого випадкового простору Лебега $L^{q(t)}(\Theta_{0,T})$ для довільного показника інтегровності $q \in \mathcal{B}_+((0,T))$, $q_0 > 1$.*

Доведення. Для функції $q \in \mathcal{B}_+((0,T))$ використаємо відповідні позначення (4). Тоді $q(t) \le q^0 < q^0+1$, $t \in [0,T]$. З узагальненої нерівності Юнга (9) для показників $\mathfrak{q} = \frac{q^0+1}{q(t)} > 1$ та $\mathfrak{q}'$ (див. (5)) випливає оцінка $|W(t,\omega)|^{q(t)} \le |W(t,\omega)|^{q^0+1} + C_4$, де стала $C_4 > 0$ не залежить від t, ω, W. Використавши цю оцінку, лему 2 і твердження 6, матимемо нерівність

$$\int_0^T \int_{\mathbb{S}} |W(t,\omega)|^{q(t)}\, \mathbb{P}(d\omega)\, dt \le \int_0^T \int_{\mathbb{S}} |W(t,\omega)|^{q^0+1}\, \mathbb{P}(d\omega)\, dt + C_4 \int_0^T \int_{\mathbb{S}} \mathbb{P}(d\omega)\, dt \le$$
$$\le T||C([0,T];L_{q^0+1})||^{q^0+1} + TC_4 < +\infty. \quad \square$$

2.4. Інтегрування випадкових процесів за часовою змінною

Зауважимо, що для випадкових процесів $\xi \in C([0,T];L_p)$ чи $\xi \in L^1(0,T;L_p)$, де $p \ge 1$, стандартно можна визначити L_p-значний (загалом, L_1-значний) інтеграл Бохнера (див., наприклад, [3, с. 22]) $\int_0^T \xi(t,\omega)\, dt$. Нагадаємо деякі його властивості.

Твердження 7 (лема 14, [1])**.** *Якщо $g \in L^\infty(0,T)$ – детермінована функція, $\eta \in L^1(0,T;L_1)$ – випадковий процес, то*

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T]: \quad \mathbb{E}\Big[\int_{t_1}^{t_2} g(t)\eta(t,\omega)\, dt\Big] = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\mathbb{E}\left[\eta(t,\omega)\right] dt.$$

Зауваження 1. Оскільки $W \in C([0,T];L_p)$, $p \ge 1$, то для всіх $h \in L^r([0,T])$, $r \ge 1$, коректним є L_p-значний інтеграл Бохнера $\int_0^T h(t)W(t,\omega)\, dt$. Зокрема, матимемо, що $hW \in L^r(0,T;L_p)$, бо

$$||h(t)W(t,\cdot)||_{L_p} = |h(t)| \cdot ||W(t,\cdot)||_{L_p} \le C_5|h(t)|, \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

згідно з теоремою Вейєрштрасса про обмеженість неперервної на $[0,T]$ функції.

Нехай $C^1([0,T])$ – простір детермінованих неперервно-диференційовних на $[0,T]$ функцій, g' – похідна функції $g \in C^1([0,T])$,

$$\Psi_0 := \{g \in C^1([0,T]) \quad | \quad g(0) = g(T) = 0\}. \tag{20}$$

Припустимо, що g – невипадкова функція, причому і то спочатку $g \in \Psi_0$.

Означення 5. *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда* від гладкої детермінованої функції $g \in \Psi_0$ по випадковому вінерівському процесу W називається такий вираз:

$$(\mathtt{PWZ}) \int_0^T g(t)\, dW(t,\omega) := -\int_0^T g'(t)W(t,\omega)\, dt. \tag{21}$$

Інтеграл справа в (21) – це інтеграл Бохнера, який існує згідно з оцінкою типу (19). Проблемою цього означення PWZ-інтеграла є те, що функція g повинна занулятися в точках $t=0$ та $t=T$. Цю проблему усувають так.

Нехай g – невипадкова функція, $g \in L^2(0,T)$. Нехай послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \Psi_0, \quad g_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{в просторі} \quad L^2(0,T).$$

Відомо, що така послідовність функції $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ завжди існує.

Означення 6. *Інтегралом Пелі-Вінера-Зигмунда* від детермінованої функції $g \in L^2(0,T)$ по випадковому вінерівському процесу W назвемо вираз

$$(\mathtt{PWZ})\int_0^T g(t)\, dW(t,\omega) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, (\mathtt{PWZ})\int_0^T g_m(t)\, dW(t,\omega), \tag{22}$$

тобто границю в просторі L_2 послідовності інтегралів від функцій $g_m \in \Psi_0$.

Властивості PWZ-інтегралів (21)-(22) розглянуто, зокрема, в [11]. Ми наведемо лише деякі з них у наступному твердженні.

Твердження 8 (про властивості PWZ-інтеграла, [11], с. 59)**.** *Нехай W – вінерівський процес. Тоді якщо $g \in L^2(0,T)$, то*

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big] = 0, \qquad \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T g(t)\, dW(t,\omega)\Big)^2\Big] = \int_0^T |g(t)|^2\, dt. \tag{23}$$

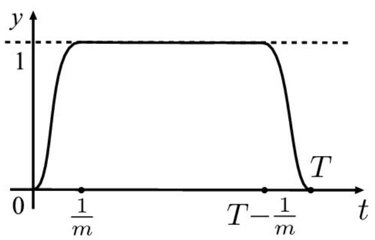
Користуватимемося таким відомим твердженням, доведення якого наведемо для повноти викладу матеріалу.

Лема 4. *Формула Ньютона-Лейбніца для PWZ-інтеграла*

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T], \quad t_1 < t_2: \quad \int_{t_1}^{t_2} dW(t) = W(t_2) - W(t_1). \tag{24}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, проведемо доведення для $t_1 = 0$, $t_2 = T$. Розглянемо послідовність функцій (див. рис.)

$$b_m(t) = \begin{cases} 3(mt)^2 - 2(mt)^3, & 0 \le t \le \frac{1}{m}, \\ 1, & \frac{1}{m} \le t \le T - \frac{1}{m}, \qquad m \in \mathbb{N}. \\ 3(m(T-t))^2 - 2(m(T-t))^3, & T - \frac{1}{m} \le t \le T, \end{cases}$$



Графік функції b_m

Очевидно, що для всіх $m \in \mathbb{N}$ ($\frac{1}{m} < \frac{T}{2}$) виконуються умови $b_m \in C^1([0,T])$,

$$b_m(0) = b'_m(0) = 0, \quad b_m(T) = b'_m(T) = 0.$$

Крім того, для всіх $t \in [0,T]$ матимемо збіжність $b_m(t) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$ в $L^2(0,T)$ і рівність

$$\int_0^{\frac{1}{m}} b'_m(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{m}} [6m^2t - 6m^3t^2]\,dt = (3m^2t^2 - 2m^3t^3)\Big|_{t=0}^{t=\frac{1}{m}} = 3-2=1.$$

В наступному інтегралі зробимо заміну $t \rightsquigarrow s$, де $s = T-t$ (тоді $dt = -ds$)

$$\int_{T-\frac{1}{m}}^{T} b'_m(t)\,dt = \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} [-6m^2(T-t)+6m^3(T-t)^2]\,dt =$$
$$= -\int_{\frac{1}{m}}^{0} [-6m^2s + 6m^3s^2]\,ds = \int_{\frac{1}{m}}^{0} [6m^2s - 6m^3s^2]\,ds = -1.$$

Тому з властивостей інтеграла Бохнера матимемо

$$W(0) = W(0)\int_0^{\frac{1}{m}} b'_m(t)\,dt = W(0)\int_0^{\frac{1}{m}} [6m^2t - 6m^3t^2]\,dt = \int_0^{\frac{1}{m}} [6m^2t - 6m^3t^2]W(0)\,dt,$$
$$W(T) = -W(T)\int_{T-\frac{1}{m}}^{T} b'_m(t)\,dt = -W(T)\int_{T-\frac{1}{m}}^{T} [-6m^2(T-t)+6m^3(T-t)^2]\,dt =$$
$$= \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} [6m^2(T-t)-6m^3(T-t)^2]W(T)\,dt.$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки $W \in C([0,T];L_2)$, то існують числа $m_0, m_T \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{1}{m_0}\right]: \quad ||W(t) - W(0)||_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall\, t \in \left[T - \frac{1}{m_T}, T\right]: \quad ||W(T) - W(t)||_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому для всіх $m \geq \max\{m_0, m_T\}$ матимемо

$$\Big|\Big|\int_0^T b_m(t)\,dW(t) - (W(T)-W(0))\Big|\Big|_{L_2} = \Big|\Big|-\int_0^T b'_m(t)W(t)\,dt - (W(T)-W(0))\Big|\Big|_{L_2} =$$
$$= \Big|\Big|\int_0^{\frac{1}{m}} [6m^2t - 6m^3t^2]W(t)\,dt + 0 + \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} [-6m^2(T-t)+6m^3(T-t)^2]W(t)\,dt +$$
$$+ \int_{T-\frac{1}{m}}^{T} [6m^2(T-t)-6m^3(T-t)^2]W(T)\,dt - \int_0^{\frac{1}{m}} [6m^2t - 6m^3t^2]W(0)\,dt\Big|\Big|_{L_2} \leq$$
$$\leq \int_0^{\frac{1}{m}} [6m^2t - 6m^3t^2]\cdot ||W(t) - W(0)||_{L_2}\,dt +$$

$$+\int\limits_{T-\frac{1}{m}}^{T}[6m^2(T-t)-6m^3(T-t)^2]\cdot ||W(T)-W(t)||_{L_2}\,dt\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\Big[\int\limits_0^{\frac{1}{m}}[6m^2t-6m^3t^2]\,dt+\int\limits_{T-\frac{1}{m}}^{T}[6m^2(T-t)-6m^3(T-t)^2]\,dt\Big]=2\,\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отже,

$$\Big|\Big|\int\limits_0^T dW(t)-(W(T)-W(0))\Big|\Big|_{L_2}\leq$$

$$\leq\Big|\Big|\int\limits_0^T dW(t)-\int\limits_0^T b_m(t)\,dW(t)\Big|\Big|_{L_2}+\Big|\Big|\int\limits_0^T b_m(t)\,dW(t)-(W(T)-W(0))\Big|\Big|_{L_2}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

тобто рівність (24) виконується майже напевно. □

2.5. Диференціювання випадкових процесів за часовою змінною

Візьмемо довільні випадковий процес $\alpha\in L^1(0,T;L_1)$ та невипадкову функцію $\beta\in L^2(0,T)$.

Означення 7. Якщо деякий випадковий процес u задовольняє умову

$$\forall\, t_1,t_2\in[0,T],\quad t_1<t_2:\quad u(t_2,\omega)=u(t_1,\omega)+\int\limits_{t_1}^{t_2}\alpha(t,\omega)\,dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\beta(t)\,dW(t,\omega),\quad (25)$$

то *стохастичним диференціалом* випадкового процесу u називається вираз

$$du(t,\omega)=\alpha(t,\omega)\,dt+\beta(t)\,dW(t,\omega),\quad (t,\omega)\in\Theta_{0,T},\qquad (26)$$

де dt – звичайний диференціал детермінованої змінної t, $dW(t,\omega)$ – диференціал вінерівського процесу.

Поняття диференційовності розглянемо детальніше.

Означення 8. Процес $\eta\in C([0,T];L_2)$ називають *диференційовним у середньоквадратичному розумінні* в точці $t_0\in[0,T]$, якщо існує границя $\underset{h\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{\eta(t_0+h)-\eta(t_0)}{h}$, яка називається *середньоквадратичною похідною* процесу η в точці t_0 і позначається $\eta'(t_0)$. Процес називається *диференційовним у середньоквадратичному розумінні* на $[0,T]$, якщо він є таким у кожній точці $t_0\in[0,T]$.

Нехай тепер $\alpha\in C([0,T];L_2)\subset L^1(0,T;L_1)$,

$$\eta(t,\omega)=\int\limits_0^t\alpha(s,\omega)\,ds,\quad (t,\omega)\in\Theta_{0,T}.\qquad (27)$$

З властивостей наявного в (27) інтеграла Бохнера випливає таке: процес η з (27) буде диференційовним у середньоквадратичному розумінні, $\eta'(t)=\alpha(t)$, $t\in[0,T]$.

Тому *стохастичним диференціалом* випадкового процесу (27) можна назвати традиційний у математичному аналізі вираз

$$d\eta(t) = \eta'(t)\, dt = \alpha(t)\, dt. \tag{28}$$

Переписавши (28) у вигляді

$$d\eta(t,\omega) = \alpha(t,\omega)\, dt + 0 \cdot dW(t,\omega), \tag{29}$$

бачимо, що таке означення повністю збігається з означенням стохастичного диференціала (26) у тому сенсі, що ці два стохастичні диференціали збігаються.

З іншого боку, формула Ньютона-Лейбніца (24) може бути записана у вигляді

$$W(t_2,\omega) = W(t_1,\omega) + \int\limits_{t_1}^{t_2} dW(t,\omega), \quad 0 \le t_1 < t_2 \le T, \quad \omega \in \mathbb{S},$$

що означає таке: вінерівський процес $W \in C([0,T]; L_2)$ має стохастичний диференціал, який можна записати так:

$$dW(t,\omega) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t,\omega). \tag{30}$$

Спробуємо надати цьому виразу іншого значення. Нагадаємо, що формулу (28) прямо застосувати не можна, бо відомо (див. [11, с. 53]), що $t \mapsto W(t,\omega)$ – ніде не диференційовна функція для $\omega \in \mathbb{S}$.

Далі, для детермінованої функції $\beta \in C([0,T]) \subset L^2(0,T)$ (вважатимемо для спрощення, що виконується умова $\beta(t) \ge \beta_0 > 0$ для всіх $t \in [0,T]$) приймемо:

$$\xi(t,\omega) := \int\limits_0^t \beta(s)\, dW(s,\omega), \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}. \tag{31}$$

Відомо, що $\xi \in C([0,T]; L_2)$. Проте, незважаючи на гладкість (неперервність) β, процес ξ не є диференційованим у середньоквадратичному розумінні в жодній точці $t \in [0,T]$, бо з другої формули (23) та умови на β випливає, що

$$\Big|\Big|\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\Big|\Big|_{L_2} = \Big|\Big|\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} \beta(s)\, dW(s,\omega)\Big|\Big|_{L_2} = \frac{1}{h}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int\limits_t^{t+h} \beta(s)\, dW(s,\omega)\Big)^2\Big]\Big)^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{h}\Big(\int\limits_t^{t+h} |\beta(s)|^2\, ds\Big)^{1/2} \ge \frac{\beta_0}{h}\Big(\int\limits_t^{t+h} ds\Big)^{1/2} = \frac{\beta_0}{\sqrt{h}} \underset{h\to+0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Зокрема, диференціала $d\xi$ в сенсі формули (28) не існує. Але

$$\xi(t_2) - \xi(t_1) = \int\limits_0^{t_2} \beta(s)\, dW(s,\omega) - \int\limits_0^{t_1} \beta(s)\, dW(s,\omega) =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{0} \beta(s)\, dW(s,\omega) + \int\limits_0^{t_2} \beta(s)\, dW(s,\omega) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta(s)\, dW(s,\omega),$$

і тому, в сенсі формули (26), матимемо такий стохастичний диференціал в.п. (31):

$$d\xi(t,\omega) = 0 \cdot dt + \beta(t)\, dW(t,\omega).$$

2.6. **Простори розподілів**

Нехай $\mathcal{O}$ – область в $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+^N$ – множина мультиіндексів розмірності $N \in \mathbb{N}$, тобто векторів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ таких, що $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$. Нехай $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ – довжина мультиіндексу, $D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_N^{\alpha_N}}$ – класична або узагальнена α-ова похідна ($\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$) функції $u = u(y_1, \ldots, y_N)$, $y := (y_1, \ldots, y_N) \in \mathcal{O}$.

Нагадаємо, що простір основних функцій $D(\mathcal{O})$ складається з усіх елементів простору $C_0^\infty(\mathcal{O})$, причому збіжність послідовності $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D(\mathcal{O})$ до функції $\varphi \in D(\mathcal{O})$ розуміється в такому сенсі. Існує компактна множина $K \subset \mathcal{O}$ така, що $\operatorname{supp} \varphi_k$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ та $D^\alpha \varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha \varphi$ рівномірно на K для будь-якого α. Нехай $D^*(\mathcal{O})$ – простір узагальнених функцій (розподілів), тобто усіх лінійних функціоналів на просторі $D(\mathcal{O})$, які неперервні стосовно зазначеної збіжності в $D(\mathcal{O})$.

Кожну функцію $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ ототожнимо з розподілом $\widehat{u} \in D^*(\mathcal{O})$, який визначається так:

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle_{D(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} u(y)\phi(y)\, dy, \quad \phi \in D(\mathcal{O}). \tag{32}$$

Далі писатимемо просто u замість $\widehat{u}$. Отже, отримуємо вкладення

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O}) \subset D^*(\mathcal{O}). \tag{33}$$

Тепер розглянемо B-значні функції, де B – деякий банахів простір.

Твердження 9 (див. [4], с. 40)**.** *Для числа $N \in \mathbb{N}$, відкритої множини $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, банахового простору B та функції $f \in L^1_{loc}(\mathcal{O}; B)$ матимемо таке: рівність*

$$\int_{\mathcal{O}} f(y)\varphi(y)\, dy = 0 \quad \text{в просторі} \quad B \quad \text{і для всіх} \quad \varphi \in D(\mathcal{O})$$

означає, що $f = 0$ в просторі B майже всюди на $\mathcal{O}$.

Нехай тепер $\mathcal{O} = (0,T)$, $D(0,T) := D((0,T))$ – простір основних функцій, $D^*(0,T) := D^*((0,T))$ – відповідний простір розподілів, B – деякий банахів простір, $D^*(0,T;B)$ – простір векторнозначних розподілів (vector valued distributions), тобто множина всіх лінійних неперервних відображень з $D(0,T)$ в B (див. [12, с. 186]). Дію елемента $u \in D^*(0,T;B)$ на функцію $\varphi \in D(0,T)$ позначатимемо $\langle u, \varphi \rangle_{D(0,T)}$. Зауважимо, що $\langle u, \varphi \rangle_{D(0,T)} \in B$ для всіх $u \in D^*(0,T;B)$ та $\varphi \in D(0,T)$.

Послідовність $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається до u при $k \to \infty$ в просторі $D^*(0,T;B)$, якщо

$$\langle f, \langle u_k, \varphi \rangle_{D(0,T)} \rangle_B \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, \langle u, \varphi \rangle_{D(0,T)} \rangle_B$$

в просторі $\mathbb{R}^1$ для всіх $f \in B^*$ та $\varphi \in D(0,T)$. Якщо $u, v \in D^*(0,T;B)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то розподіл $\alpha u + \beta v$ визначається правилом

$$\langle \alpha u + \beta v, \varphi \rangle_{D(0,T)} = \alpha \langle u, \varphi \rangle_{D(0,T)} + \beta \langle v, \varphi \rangle_{D(0,T)}, \quad \varphi \in D(0,T).$$

Якщо $u \in D^*(0,T;B)$, $\psi \in C^\infty([0,T])$, то розподіл ψu визначається правилом

$$\langle \psi u, \varphi \rangle_{D(0,T)} = \langle u, \psi\varphi \rangle_{D(0,T)}, \quad \varphi \in D(0,T).$$

Зрозуміло, що $D^*(0,T;\mathbb{R}^1) = D^*(0,T)$ при $B = \mathbb{R}^1$.

Кожну функцію $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B)$ ототожнимо з розподілом $\widetilde{u} \in D^*(0,T;B)$ так:

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle_{D(0,T)} := \int\limits_0^T u(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in D(0,T). \tag{34}$$

Аналогічно як і у розгляді (32), замість $\widetilde{u}$ писатимемо u і отримаємо такий аналог вкладення (33):

$$L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B) \subset D^*(0,T;B). \tag{35}$$

2.7. **Похідні в сенсі розподілів**

Припустимо, що $\mathbb{S}$ – деяка обмежена область в $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ – міра Лебега (нагадаємо, що $\mathbb{P}(\mathbb{S}) = 1$). Позначимо через u_t похідну за часом деякої функції $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Theta_{0,T})$ в сенсі розподілів з простору $D^*(\Theta_{0,T})$

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{D(\Theta_{0,T})} := -\int\limits_{\Theta_{0,T}} u(t,\omega)\varphi_t(t,\omega)\,dtd\omega \quad \text{для} \quad \varphi \in D(\Theta_{0,T}). \tag{36}$$

Для деякого простору B позначимо через u'_B похідну функції $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B)$ у сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;B)$

$$\langle u'_B, \theta \rangle_{D(0,T)} := -\langle u, \theta' \rangle_{D(0,T)} = -\int\limits_0^T u(t)\theta'(t)\,dt \quad \text{для всіх} \quad \theta \in D(0,T). \tag{37}$$

Припустимо, що

$$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;A) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;B), \tag{38}$$

де простори A та B неперервно вкладаються в деякий топологічний векторний простір $\mathcal{V}$. Тоді для будь-якого $\theta \in D(0,T)$ отримуємо

$$\langle u'_A, \theta \rangle_{D(0,T)} = -\int\limits_0^T u(t)\theta'(t)\,dt \quad \text{в} \quad A \text{ і аналогічно в } \quad \mathcal{V};$$

$$\langle u'_B, \theta \rangle_{D(0,T)} = -\int\limits_0^T u(t)\theta'(t)\,dt \quad \text{в} \quad B \quad \text{і аналогічно в } \quad \mathcal{V}.$$

Зауваження 2. Якщо (38) виконується, то $u'_A = u'_B$ в просторі $D^*(0,T;\mathcal{V})$. Крім того, як u'_A так і u'_B дорівнюють, наприклад, u'_{A+B}. Тому, якщо маємо (38), то можемо взяти похідну від u в сенсі $D^*(0,T;A+B)$ і використати для неї просте позначення u'. Те саме позначення вживаємо для трьох просторів замість (38) тощо.

Нам будуть потрібні такі твердження.

Твердження 10 (див. [4], с. 50)**.** *Якщо простори A, B та C неперервно вкладаються в деякий топологічний векторний простір, то множина*

$$\{u \in C^\infty([0,T];A) \;\mid\; u' \in C^\infty([0,T];B) + C^\infty([0,T];C)\}$$

є щільною в $\{u \in L^p(0,T;A) \;\mid\; u' \in L^q(0,T;B) + L^r(0,T;C)\}$, *де* $p,q,r \in [1,+\infty)$.

Твердження 11 (див. [4], с. 58)**.** *Припустимо, що B є банаховим простором таким, що $D(\mathbb{S}) \,\bar{\circlearrowright}\, B$. Тоді простір $L^1(0,T;B^*)$ вкладається в $D^*(\Theta_{0,T})$ за допомогою відображення $f \mapsto \widehat{f}$ такого, що*

$$\langle \widehat{f}, \varphi\rangle_{D(\Theta_{0,T})} = \int\limits_0^T \langle f(t), \varphi(t)\rangle_B \, dt, \quad f \in L^1(0,T;B^*), \quad \varphi \in D(\Theta_{0,T}).$$

Тут $\varphi \in D(\Theta_{0,T})$, а тому $\varphi(t,\cdot) \in D(\mathbb{S}) \subset B$ і дія $\langle f(t), \varphi(t)\rangle_B$ коректна.

Зауваження 3. Візьмемо функцію $u \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{S})) = L^1(\Theta_{0,T})$. Позначимо через u_t похідну від u в сенсі $D^*(\Theta_{0,T})$ (див. (36)), а через u' – похідну від u в сенсі $D^*(0,T;L^1(\mathbb{S}))$ (див. (37)). Очевидно, u_t та u' коректно визначені.

Маємо такий результат.

Лема 5. *Якщо B є банаховим простором таким, що $D(\mathbb{S}) \,\bar{\circlearrowright}\, B$, то для кожного $u \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{S}))$ виконується таке:*
(i) якщо $u_t \in L^1(0,T;B^*)$, то $u' = u_t$ в просторі $D^*(0,T;B^* + L^1(\mathbb{S}))$;
(ii) якщо $u' \in L^1(0,T;B^*)$, то $u_t = u'$ в просторі $D^*(\Theta_{0,T})$.

Доведення. Використаємо метод доведення твердження 2.6.2 [4, с. 59]. Візьмемо функцію $u \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{S})) = L^1(\Theta_{0,T})$.

Доведення факту (i). Припустимо, що $u_t \in L^1(0,T;B^*)$. Візьмемо довільну функцію $z \in D(\mathbb{S})$ і визначимо відображення $L_z : D^*(\mathbb{S}) \to \mathbb{R}$ за правилом

$$L_z(h) = \langle h, z\rangle_{D(\mathbb{S})}, \quad h \in D^*(\mathbb{S}).$$

Звуження l_z функціонала L_z на $L^1(\mathbb{S}) \subset D^*(\mathbb{S})$ є неперервним і лінійним на $L^1(\mathbb{S})$. Крім того, $l_z(h) = \int_{\mathbb{S}} h\, z\, dx, \ \ h \in L^1(\mathbb{S})$. Отже, оскільки $u \in L^1(\Theta_{0,T})$, за теоремою Фубіні та означенням u_t, то отримуємо

$$I := L_z\Big(-\int\limits_0^T u\theta'\, dt\Big) = l_z\Big(-\int\limits_0^T u\theta'\, dt\Big) = -\int\limits_0^T l_z(u)\theta'\, dt = -\int\limits_0^T \Big(\int\limits_{\mathbb{S}} u\, z\, dx\Big)\theta'\, dt =$$
$$= -\int\limits_{\Theta_{0,T}} u\, z\theta'\, dtdx = \langle u_t, \theta z\rangle_{D(\Theta_{0,T})}, \quad \theta \in D(0,T).$$

За означенням вкладення $L^1(0,T;B^*)$ в простір $D^*(\Theta_{0,T})$ (див. Твердження 11) і оскільки $u_t \in L^1(0,T;B^*)$, матимемо $I = \int_0^T \langle u_t(t), z\rangle_B\, \theta(t)\, dt$.

Звуження $\widetilde{l}_z$ функціонала L_z на $B^* \subset D^*(\mathbb{S})$ є неперервним і лінійним на B^*. Крім того, $\widetilde{l}_z(h) = \langle h, z\rangle_B$ для $h \in B^*$. Оскільки $u_t \in L^1(0,T;B^*)$, то

$$I = \int\limits_0^T \widetilde{l}_z(u_t)\theta\, dt = \widetilde{l}_z\Big(\int\limits_0^T u_t\theta\, dt\Big) = L_z\Big(\int\limits_0^T u_t\theta\, dt\Big)$$

для всіх $z \in D(\mathbb{S})$. Тому $-\int_0^T u\theta'\, dt$ дорівнює $\int_0^T u_t\theta\, dt$ в $D^*(\mathbb{S})$. Оскільки вони насправді належать до $B^* + L^1(\mathbb{S})$, то ця рівність виконується в $B^* + L^1(\mathbb{S})$, що доводить таке:

$$\langle u', \theta\rangle_{D(0,T)} = -\int_0^T u\theta'\,dt = \int_0^T u_t\theta\,dt = \langle u_t, \theta\rangle_{D(0,T)} \quad \text{в просторі} \quad B^* + L^1(\mathbb{S})$$

для всіх $\theta \in D(0,T)$ і наше перше твердження леми доведено.

Доведення факту (ii). Припустимо, що $u' \in L^1(0,T;B^*)$. Доведемо, що

$$\int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)\rangle_B\,dt = -\int_{\Theta_{0,T}} u\varphi_t\,dtd\omega \tag{39}$$

для будь-якого $\varphi \in D(\Theta_{0,T})$. Скористаємося теоремою щільності. З Твердження 10 випливає існування послідовності $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty([0,T];L^1(\mathbb{S}))$ такої, що збігається до u в $L^1(0,T;L^1(\mathbb{S}))$ та $\{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty([0,T];B^*)$ збігається до u' в $L^1(0,T;B^*)$.

Оскільки $u'_m(t) \in B^*\cap L^1(\mathbb{S})$ для $t \in [0,T]$, то за означенням вкладення B^* і $L^1(\mathbb{S})$ в $D^*(\mathbb{S})$ маємо, що $\langle u'_m(t), z\rangle_B = \int_{\mathbb{S}} u'_m(t)\,z\,dx$ для всіх $z \in D(\mathbb{S})$. Використовуючи теорему Фубіні, отримаємо

$$J := \int_0^T \langle u'_m(t), \varphi(t)\rangle_B\,dt = \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{S}} u'_m, \varphi\,d\omega\Big)\,dt = \int_{\Theta_{0,T}} u'_m\,\varphi\,dtd\omega.$$

Тому з класичної формули інтегрування частинами та умов $\varphi|_{t=0} = \varphi|_{t=T} = 0$ отримуємо, що $J = -\int_{\Theta_{0,T}} u_m\varphi_t\,dtd\omega$. Це доводить (39) з u_m замість u. Завдяки збіжності послідовності $\{u_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ та належності $\varphi \in C([0,T];B)$ можемо перейти до границі і довести, що u також задовольняє (39). □

Зауваження 4. Оскільки маємо справу з функціями багатьох змінних, то аналогічно як і в [12, с. 187] нам буде зручніше обидві введені похідні (36) і (37) позначити одним символом u_t навіть у випадку, коли умови леми 5 не виконуються. Про те, яке означення ми використовуватимемо далі, зазначатимемо окремо.

2.8. **Білий шум і його використання**

Нехай знову $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – деякий повний імовірнісний простір, $\alpha \in L^1(0,T;L_1)$, випадковий процес η визначено в (27). Тоді похідна η_t коректно визначена в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_1)$. Крім того, $\eta_t = \alpha$. Тому стохастичний диференціал (28) можна записати у вигляді

$$d\eta = \eta_t\,dt. \tag{40}$$

З іншого боку, вінерівський процес W, зокрема належить до $C([0,T];L_2)$. Тому коректно визначена його похідна в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_2)$, а саме, W_t – це такий розподіл з $D^*(0,T;L_2)$, що

$$\langle W_t, \phi\rangle_{D(0,T)} = -\langle W, \phi_t\rangle_{D(0,T)}, \quad \phi \in D(0,T). \tag{41}$$

Тому і подання розподілів у вигляді (34) матимемо, що права частина (41) дорівнює $-\int_0^T W(t)\phi_t(t)\,dt$. За означенням PWZ-інтеграла (21) отримаємо, що цей вираз дорівнює

$$\int_0^T \phi(t)\, dW(t). \tag{42}$$

Означення 9. Похідна W_t вінерівського процесу W в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_2)$ називається *білим шумом.*

З формул (41)-(42) (аналогічно як і у [13]-[14]) випливає, що білий шум W_t визначається співвідношенням

$$\langle W_t, \phi\rangle_{D(0,T)} = \int_0^T \phi(t)\, dW(t), \quad \phi \in D(0,T). \tag{43}$$

Зауваження 5. Оскільки $L_2 \subset L_1$, то $D^*(0,T;L_2) \subset D^*(0,T;L_1)$ (див. [12, с. 187]) і тому похідну W_t можна вважати похідною в сенсі простору розподілів $D^*(0,T;L_1)$.

Нехай $\alpha \in L^1(0,T;L_1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Розглянемо випадковий процес

$$u(t,\omega) = u(0,\omega) + \int_0^t \alpha(s,\omega)\, ds + \beta\, W(t,\omega). \tag{44}$$

Використавши властивості інтеграла Бохнера, зокрема формулу Ньютона-Лейбніца (24), отримаємо, що

$$u(t_2) - u(t_1) = u(0) + \int_0^{t_2} \alpha(s)\, ds + \beta\, W(t_2) - u(0) - \int_0^{t_1} \alpha(s)\, ds - \beta\, W(t_1) =$$
$$= \int_{t_1}^0 \alpha(s)\, ds + \int_0^{t_2} \alpha(s)\, ds + \beta(W(t_2) - W(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(s)\, ds + \int_{t_1}^{t_2} \beta\, dW.$$

Тому за означенням типу (26) випадковий процес (44) має стохастичний диференціал

$$du(t,\omega) = \alpha(t,\omega)\, dt + \beta\, dW(t,\omega). \tag{45}$$

З іншого боку, випадковий процес (44) належить до простору $C([0,T];L_1)$, а тому має таку похідну в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_1)$:

$$u_t = (u(0))_t + \Big(\int_0^t \alpha(s)\, ds\Big)_t + (\beta\, W)_t,$$

яка дорівнює (див. зауваження 5)

$$u_t = \alpha + \beta\, W_t. \tag{46}$$

Зауваження 6. Порівнюючи вираз (45) з (46), домовимося про таке: той факт, що випадковий процес u має стохастичний диференціал вигляду (45) далі записуватимемо у вигляді (46).

Означення 10. Вираз u_t з формули (46) називатимемо *узагальненою стохастичною похідною (generalized stochastic derivative)* випадкового процесу u з (44).

3. Інтегральні рівняння Вольтерра з випадковим параметром

Нехай $d \in \mathbb{N}$ та $T > 0$ – деякі числа, $\mathcal{B}(0,T)$ – борелівські підмножини $[0,T]$, $(\mathbb{S},\mathcal{F},\mathbb{P})$ – деякий повний імовірністний простір, $\mathcal{P}$ – BF-вимірні множини з (13), $\mathcal{K}$ – BBF-вимірні множини з (16) при $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$.

Розглянемо таку систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з випадковим параметром $\omega \in \mathbb{S}$

$$z(\tau,\omega) - z_0(\omega) + \int_0^\tau L\Big(t,\omega,z(t,\omega)\Big)\,dt = \int_0^\tau M(t,\omega)\,dt, \quad \tau \in [0,T], \tag{47}$$

де $z_0 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^d$, $L : \Theta_{0,T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ та $M : \Theta_{0,T} \to \mathbb{R}^d$ – деякі відомі функції.

У працях [15]-[16], зокрема доведено низку теорем Каратеодорі-Ласалля про глобальну розв'язність систем звичайних диференціальних рівнянь. Аналогічний результат для системи (47) з випадковим параметром $\omega \in \mathbb{S}$ міститься в теоремі 1. Ключовим фактом у цьому твердженні є BF-вимірність отриманого розв'язку системи (47).

Теорема 1 (Каратеодорі-Ласалля для системи з параметром). *Нехай $z_0 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^d$ є F-вимірною функцією, функція $M : \Theta_{0,T} \to \mathbb{R}^d$ є BF-вимірною, для $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega \in \mathbb{S}$ маємо, що $M(\cdot,\omega) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^d)$, виконуються такі умови:*

1) *функція $(t,z) \mapsto L(t,\omega,z)$ є неперервною;*
2) *функція L є BBF-вимірною;*
3) *існують число $\ell_0 > 0$ та невід'ємна функція $\ell_1(\cdot,\omega) \in L^1(0,T)$ такі, що*

$$(L(t,\omega,z),z)_{\mathbb{R}^d} \geq -\ell_0|z|^2 - \ell_1(t,\omega) \tag{48}$$

для всіх $t \in [0,T]$, всіх $z \in \mathbb{R}^d$ та для $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega \in \mathbb{S}$.

Тоді існує BF-вимірний розв'язок z системи (47) такий, що $z(\cdot,\omega) \in \{C([0,T])\}^d$ для $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega \in \mathbb{S}$.

Доведення. Існування BF-вимірного розв'язку зразу випливає з теореми 13 [9, с. 2466], а його неперервність – з доведення теореми 13 [9, с. 2466], де розглянуто загальніший випадок системи рівнянь типу (47) з запізненням. □

4. Нелінійні стохастичні диференціальні рівняння

Повернемося нарешті до задачі Коші (1)-(2). З огляду на результати, які ми отримали в підрозділі 2.8, рівняння (1) містить похідні в сенсі простору розподілів $D^*(0,T;L_1)$. Зробимо заміну невідомої функції $u \rightsquigarrow \widetilde{u}$ так:

$$u = \widetilde{u} + W, \tag{49}$$

де W – вінерівський процес з означення 4. Тоді в сенсі розподілів з простору $D^*(0,T;L_1)$ виконується формула $u_t = \widetilde{u}_t + W_t$. Тому з (1)-(2) отримаємо

$$\widetilde{u}_t + W_t(t,\omega) + a(t)\Big(\widetilde{u} + W(t,\omega)\Big) + g(t)\Big|\widetilde{u} + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(\widetilde{u} + W(t,\omega)\Big) =$$

$$= f(t,\omega) + W_t(t,\omega),$$

$$\widetilde{u}(0,\omega) + W(0,\omega) = u_0(\omega).$$

Оскільки $W(0,\omega)=0$ майже напевно, то звідси отримаємо рівності

$$\widetilde{u}_t + a(t)\Big(\widetilde{u}+W(t,\omega)\Big) + g(t)\Big|\widetilde{u}+W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(\widetilde{u}+W(t,\omega)\Big) = f(t,\omega), \tag{50}$$

$$\widetilde{u}(0,\omega) = u_0(\omega). \tag{51}$$

З результатів підрозділу 2.8 випливає, що $\widetilde{u}_t$ також є стохастичним диференціалом (формально, з нульовим коефіцієнтом біля dW). Тому (50) можна "зінтегрувати" за $t\in(0,\tau)$ і, використавши (51), після перегрупування отримати рівність

$$\widetilde{u}(\tau,\omega) + \int\limits_0^\tau \Big[a(t)\widetilde{u}(t,\omega) + g(t)\Big|\widetilde{u}(t,\omega)+W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(\widetilde{u}(t,\omega)+W(t,\omega)\Big)\Big]\,dt =$$
$$= u_0(\omega) + \int\limits_0^\tau \Big[f(t,\omega) - a(t)W(t,\omega)\Big]\,dt, \quad \tau\in[0,T], \quad \omega\in\mathbb{S}. \tag{52}$$

Означення 11. Узагальненим розв'язком задачі Коші (1)-(2) називається функція u вигляду (49), для якої відповідна неперервна (для $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega\in\mathbb{S}$) функція

$$[0,T]\ni t\mapsto \widetilde{u}(t,\omega)\in\mathbb{R} \tag{53}$$

поточково задовольняє інтегральне рівняння (52).

Теорема 2. *Нехай $u_0:\mathbb{S}\to\mathbb{R}$ є F-вимірною функцією, $f:\Theta_{0,T}\to\mathbb{R}$ є BF-вимірною функцією, для $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega\in\mathbb{S}$ маємо, що $f(\cdot,\omega)\in L^2(0,T)$. Тоді якщо $a,g,q\in C([0,T])$ та для всіх $t\in[0,T]$ виконуються оцінки*

$$g(t)\ge g_0>0, \qquad q(t)\ge q_0>1, \tag{54}$$

то задача (1)-(2) має єдиний узагальнений розв'язок u.

Доведення. Існування розв'язку. Для доведення використаємо теорему 1. Для цього (52) зіставимо з (47). Матимемо: $d=1$, $z=\widetilde{u}$, $z_0=u_0$,

$$L(t,\omega,z) = a(t)z + g(t)\Big|z+W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(z+W(t,\omega)\Big),$$

$$M(t,\omega) = f(t,\omega) - a(t)W(t,\omega).$$

Підтвердимо, що виконуються умови теореми 1. Зрозуміло, що достатньо перевірити лише виконання умов 1-3 теореми 1.

Найперше зауважимо, що з неперервності функцій a,g,q, на додачу до оцінок (54), випливає, що для всіх $t\in[0,T]$ виконуються оцінки

$$|a(t)|\le a^0<+\infty, \quad g(t)\le g^0<+\infty, \quad q(t)\le q^0<+\infty. \tag{55}$$

1. Спершу продемонструємо неперервність функції

$$(t,z)\mapsto L(t,\omega,z). \tag{56}$$

Зрозуміло, що функція L неперервна за t, бо вінерівський процес є неперервним за t (див. [11, с. 51]) і такі умови теореми 2. Підтвердимо її неперервність за $z\in[-R,R]$, де $R>0$ – довільне число. Візьмемо довільні $(t,\omega)\in\Theta_{0,T}$, $z_0\in[-R,R]$,

$z_1 \in \mathbb{R}$. Нехай $|z_1 - z_0| < 1$. Тоді, зокрема, $|z_1| < R + 1$. Використавши оцінки (55), отримаємо

$$|L(t,\omega,z_1) - L(t,\omega,z_0)| = \Big|a(t)z_1 + g(t)\Big|z_1 + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(z_1 + W(t,\omega)\Big) -$$

$$- a(t)z_0 - g(t)\Big|z_0 + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(z_0 + W(t,\omega)\Big)\Big| \le a^0 V_1 + g^0 V_2, \tag{57}$$

де $V_1 = |z_1 - z_0| \underset{z_1 \to z_0}{\longrightarrow} 0$,

$$V_2 = \Big|\ |z_1 + W|^{q(t)-2}(z_1 + W) - |z_0 + W|^{q(t)-2}(z_0 + W)\Big|.$$

Припустимо спершу, що $q(t) = 2$ для деякого $t \in [0,T]$. Тоді

$$V_2 = |z_1 - z_0|. \tag{58}$$

Нехай $q(t) \le 2$. Тоді з нерівності (10) для $y = t$, $\alpha(t) = q(t) - 1$ отримаємо

$$V_2 \le C_6\Big|(z_1 + W) - (z_0 + W)\Big|^{q(t)-1} \le C_7|z_1 - z_0|^{q_0-1}. \tag{59}$$

Нехай тепер $q(t) > 2$. Тоді з нерівності (10) для $y = t$, $\alpha(t) = 1$ отримаємо

$$V_2 \le C_8\Big||z_1 + W| + |z_0 + W|\Big|^{q(t)-2}\Big|(z_1 + W) - (z_0 + W)\Big| \le C_9(R)|z_1 - z_0|. \tag{60}$$

З (58)-(60) випливає, що для всіх $t \in [0,T]$ матимемо, що

$$V_2 \le C_{10}(R)\max\Big\{|z_1 - z_0|,\ \ |z_1 - z_0|^{q_0-1}\Big\} \underset{z_1 \to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

Тому з (57) випливає, що $|L(t,\omega,z_1) - L(t,\omega,z_0)| \underset{z_1 \to z_0}{\longrightarrow} 0$. Завдяки довільності $R > 0$ матимемо неперервність L за z на $\mathbb{R}$.

2. Функція (56) неперервна, функція $\omega \mapsto L(t,\omega,z)$ є F-вимірною (бо таким є вінерівський процес). Тому, за багатовимірним аналогом леми 1, функція (17) є BBF-вимірною.

3. Продемонструємо, що L задовольняє оцінку (48). Використавши (54), (55), одержимо

$$L(t,\omega,z)\cdot z = \Big(a(t)z + g(t)\Big|z + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(z + W(t,\omega)\Big)\Big)\cdot z \ge$$

$$\ge -a^0 z^2 + g(t)\Big|z + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(z + W(t,\omega)\Big)\cdot\Big(z + W(t,\omega) - W(t,\omega)\Big) \ge$$

$$\ge -a^0 z^2 + g_0\Big|z + W(t,\omega)\Big|^{q(t)} - g^0 V_3, \tag{61}$$

де

$$V_3 = \Big|\ \ \Big|z + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\cdot\Big(z + W(t,\omega)\Big)\cdot W(t,\omega)\Big| = \Big|z + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-1}\cdot\Big|W(t,\omega)\Big|. \tag{62}$$

Використавши узагальнену нерівність Юнга (9) для $y = t$, $\varepsilon = \frac{g_0}{2g^0}$ та $\mathfrak{q}(t) = \frac{q(t)}{q(t)-1}$ (тоді $\mathfrak{q}'(t) = \frac{\mathfrak{q}(t)}{\mathfrak{q}(t)-1} = q(t)$), отримаємо оцінку

$$V_3 \le \frac{g_0}{2g^0}\ \Big|z + W(t,\omega)\Big|^{q(t)} + C_{11}\Big|W(t,\omega)\Big|^{q(t)},$$

де стала $C_{11} > 0$ не залежить від t, ω, z, W. Тому з (61)-(62) випливає, що

$$L(t,\omega,z)\cdot z \ge -a^0 z^2 + \frac{g_0}{2}\Big|z + W(t,\omega)\Big|^{q(t)} - g^0 C_{11}\Big|W(t,\omega)\Big|^{q(t)} \ge$$

$$\ge -a^0 z^2 - g^0 C_{11}\ell(t,\omega),$$

де $\ell(t,\omega) = |W(t,\omega)|^{q(t)}$. З леми 3 маємо, що $\ell \in L^1(\Theta_{0,T})$, а тому (48) виконується.

Отож всі умови теореми 1 виконуються, тому існування розв'язку доведено.

Єдиність розв'язку. Ми щойно довели існування функції u вигляду (49), для якої відповідна функція (53) є неперервною для $\mathbb{P}$-майже всіх $\omega \in \mathbb{S}$.

Підінтегральна функція першого інтеграла в (52) є неперервною за t, а другого – інтегровною за t. Отже, функція (53) абсолютно неперервна і, зокрема, обмежена та диференційовна майже скрізь на $[0,T]$. Тому, використовуючи очевидну нерівність

$$|a^2 - b^2| = |a-b|\cdot|a+b| \le |a-b|\cdot \max\{|a|,\ |b|\},$$

доводимо абсолютну неперервність функції $[0,T] \ni t \mapsto |\widetilde{u}(t,\omega)|^2 \in \mathbb{R}$ та формулу

$$\frac{d}{dt}\,|\widetilde{u}(t,\omega)|^2 = 2\widetilde{u}_t(t,\omega)\widetilde{u}(t,\omega).$$

Тоді

$$\int_0^\tau \widetilde{u}_t(t,\omega)\widetilde{u}(t,\omega)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{d}{dt}\,|\widetilde{u}(t,\omega)|^2\,dt = \frac{1}{2}\,|\widetilde{u}(\tau,\omega)|^2 - \frac{1}{2}\,|\widetilde{u}(0,\omega)|^2. \tag{63}$$

Продиференціювавши (52) за τ, отримаємо рівність (50), яка тепер виконується вже поточково. Використовуючи цей факт, оцінки типу (11) і лему Гронуолла-Белмана, доводимо єдиність розв'язку задачі Коші (1)-(2). Теорему 2 доведено. □

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми 2 і, крім того,* $f \in L^2(0,T;L_2)$ *та* $u_0 \in L_2$, *то узагальнений розв'язок* u *задачі (1)-(2) задовольняє включення*

$$u \in L^2(0,T;L_2) \cap L^{q(t)}(\Theta_{0,T}). \tag{64}$$

Доведення. В теоремі 2 ми довели існування функції u вигляду (49), для якої відповідна функція (53) є абсолютно неперервною м.н. і поточково задовольняє (50). Домноживши (50) на $\widetilde{u}$ та зінтегрувавши за $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$, отримаємо

$$\int_0^\tau \widetilde{u}_t(t,\omega)\widetilde{u}(t,\omega)\,dt + \int_0^\tau \Big[a(t)\widetilde{u}(t,\omega) +$$

$$+ g(t)\Big|\widetilde{u}(t,\omega) + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(\widetilde{u}(t,\omega) + W(t,\omega)\Big)\Big]\widetilde{u}(t,\omega)\,dt =$$

$$= \int_0^\tau \Big[f(t,\omega) - a(t)W(t,\omega)\Big]\widetilde{u}(t,\omega)\,dt.$$

Використавши (63), після перегрупування виразів, одержимо рівність

$$\frac{1}{2}|\widetilde{u}(\tau,\omega)|^2 + \int_0^\tau \Big[a(t)|\widetilde{u}(t,\omega)|^2 + g(t)\Big|\widetilde{u}(t,\omega) + W(t,\omega)\Big|^{q(t)}\Big]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}|u_0(\omega)|^2 + \int_0^\tau \Big[f(t,\omega) - a(t)W(t,\omega)\Big]\widetilde{u}(t,\omega)\,dt +$$

$$+ \int_0^\tau g(t)\Big|\widetilde{u}(t,\omega) + W(t,\omega)\Big|^{q(t)-2}\Big(\widetilde{u}(t,\omega) + W(t,\omega)\Big)W(t,\omega)\,dt. \qquad (65)$$

Для оцінювання наявних в (65) виразів використаємо оцінки (54), (55), узагальнені нерівності Юнга (9) для показників $\mathfrak{q} = 2$ та $\mathfrak{q} = \frac{q(t)}{q(t)-1}$ (аналогічно як при отриманні (62)). У підсумку одержимо оцінку

$$\frac{1}{2}|\widetilde{u}(\tau,\omega)|^2 + \frac{g_0}{2}\int_0^\tau \Big|\widetilde{u}(t,\omega) + W(t,\omega)\Big|^{q(t)}\,dt \le C_{12}\Big(|u_0(\omega)|^2 +$$

$$+ \int_0^\tau \Big[|f(t,\omega)|^2 + |W(t,\omega)|^2 + |W(t,\omega)|^{q(t)}\Big]\,dt + \int_0^\tau |\widetilde{u}(t,\omega)|^2\,dt\Big),$$

де стала $C_{12} > 0$ не залежить від $t, \omega, \widetilde{u}, W$. Звідси, на підставі умов теореми, леми 2, леми 3 і леми Гронуола-Белмана випливає нерівність

$$|\widetilde{u}(\tau,\omega)|^2 + \int_0^\tau \Big|\widetilde{u}(t,\omega) + W(t,\omega)\Big|^{q(t)}\,dt \le C_{13}, \quad \tau \in [0,T], \quad \omega \in \mathbb{S}, \qquad (66)$$

де стала $C_{13} > 0$ не залежить від $t, \omega, \widetilde{u}$.

Зінтегрувавши (66) за $\omega \in \mathbb{S}$, після нескладних перетворень, отримаємо нерівність, з якої і випливає (64). Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. О. Бугрій, Н. Бугрій, В. Власов, *Просторово-часовий стохастичний інтеграл Пелі-Вінера-Зигмунда*, Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта, **1** (2024), (подано до друку).
2. A. Kaltenbach, *Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents*, Lect. Notes Math. Vol. **2329**. Springer Nature, Switzerland AG, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-29670-3
3. T. Roubicek, *Nonlinear partial differential equations with applications*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2005. DOI: 10.1007/978-3-0348-0513-1
4. J. Droniou, *Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles*, Lecture notes, Universite de Provence, Marseille, 2001.
5. O. Buhrii, *On the existence of mild solutions of the initial-boundary-value problems for the Petrovskii-type semilinear parabolic systems with variable exponents of nonlinearity*, Ukr. Math. J. **66** (2014), no. 4, 487–498. DOI: 10.1007/s11253-014-0947-2
6. O. M. Buhrii and N. V. Buhrii, *Doubly nonlinear elliptic-parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities*, Advances in Nonlinear Variational Inequalities **22** (2019), no. 2, 1–22.
7. O. Buhrii and N. Buhrii, *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **473** (2019), no. 2, 695–711. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.12.058

8. V. Kadets, *A course in functional analysis and measure theory*, Springer Int. Publ., 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-92004-7
9. K. L. Kuttler and J. Li, *Measurable solutions for stochastic evolution equations without uniqueness*, Applicable Analysis. **94** (2015), no. 12, 2456–2477. DOI: 10.1080/00036811.2014.989498
10. Ю. С. Мішура, К. В. Ральченко, Л. М. Сахно, Г. М. Шевченко, *Випадкові процеси: теорія, статистика, застосування*, Київ, ВПЦ "Київський університет", 2023.
11. L. C. Evans, *An introduction to stochastic differential equations*, Vol. **82**, Amer. Math. Soc., 2012.
12. M. Chipot, *Elements of nonlinear analysis*, Basel, Boston, Berlin, Birkhauser, 2012. DOI: 10.1007/978-3-0348-8428-0
13. G. Vage, *Stochastic differential equations and Kondratiev spaces*, Dr. Ing. Thesis. Trondheim, 1995.
14. H. Liang, L. Hou, and J. Ming, *The velocity tracking problem for Wick-stochastic Navier–Stokes flows using Weiner chaos expansion*, J. Computat. Appl. Math. **307** (2016), 25–36. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.030
15. O. Buhrii and N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Math. **15** (2017), 859–883. DOI 10.1515/math-2017-0069
16. O. Buhrii, N. Buhrii, and O. Kholyavka, *On Caratheodory-LaSalle's theorems for systems of ordinary differential equations and their application*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інф. **27** (2019), 9–17.

Стаття: надійшла до редколегії 03.06.2024
доопрацьована 08.09.2024
прийнята до друку 11.12.2024

STOCHASTIC DIFFERENTIATIONS IN EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Oleh BUHRII, Mariana KHOMA, Iryna-Mariya VOVK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, UKRAINE
e-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua, mariana.khoma@lnu.edu.ua, iryna-mariia.vovk@lnu.edu.ua

Methodical issues related to the concept of stochastic integration and differentiation are considered. The Cauchy problem for model nonlinear stochastic differential equations with variable parameters of nonlinearity is studied.

Key words: stochastic derivative, stochastic differential equation, Wiener process.